

十字交叉法错误题分析

吴孙富¹, 肖柏林²

(1. 当阳市第二高级中学, 湖北当阳 444100; 2. 襄阳市第四中学, 湖北襄阳 441021)

摘要: 从数学的角度探讨了用十字交叉法解题导致增解和漏解的原因, 指出错解某例题是由于解题者错误地使用了氢碳原子个数比, 进一步分析证明错解的深层次原因在于该题使用的数据有问题。强调题目编制过程中应重视科学性, 尤其要注意错题在教学中的破坏作用。

关键词: 化学计算; 十字交叉法; 二元一次方程组法; 氢碳比

文章编号: 1005-6629(2015)6-0080-04

中图分类号: G633.8

文献标识码: B

1 问题的提出

李薇老师原创了一道例题(下文所说例题均指此题)如下:

相邻两种烷烃的混合物 20mL, 完全燃烧后生成 30mL 的 CO_2 , 48mL 的 H_2O 。求该烷烃的可能组合及体积比。

在“十字交叉法应用中的常见问题及解析”^[1]一文中, 李薇老师先求出了混合烃的平均分子式为 $\text{C}_{1.5}\text{H}_{4.8}$, 再根据 $\text{C}_{1.5}\text{H}_{4.8}$ 确定两种烷烃为 CH_4 和 C_2H_6 , 然后用氢碳比的十字交叉法进行求解得甲烷与乙烷的体积比为 1:2(具体解法请参看文献^[2]和下文)。

在“对一道错题的剖析——兼析十字交叉法

的应用”^[3]一文中, 万辉霞和钟辉生两位老师用二元一次方程组解答了此例题。两位老师在求出平均分子式为 $\text{C}_{1.5}\text{H}_{4.8}$ 、确定例题中两种烷烃分别为 CH_4 和 C_2H_6 之后, 根据混合烃的体积与 CO_2 的体积、混合烃的体积与 H_2O 的体积分别列出了两组二元一次方程组进行求解。两位老师先用两组二元一次方程组解出两组甲烷与乙烷的体积, 然后再将两组体积分别求比值得两组体积比分别为 1:1 和 3:2(具体解法可参看文献^[4]和下文)。由于两组方程组的求解结果不同, 所以两位老师得出了例题无解、例题是错题的结论, 笔者赞同该结论。

例题无解, 但李薇老师用十字交叉法所求例题的解为 1:2。由于李薇老师用十字交叉法所求的

于检测的错误导致过量的甲醛不能还原 Cu_2O 生成 Cu 、 $\text{Cu}(\text{OH})_2$ 能氧化甲酸钠生成 Na_2CO_3 的判断错误。

我们知道, 乙醛与新制 $\text{Cu}(\text{OH})_2$ 反应主要产物是 Cu_2O 和乙酸钠, 由此推知甲醛与新制 $\text{Cu}(\text{OH})_2$ 反应主要产物是 Cu_2O 和甲酸钠。由于甲醛还原性较强, 过量甲醛能还原 Cu_2O 生成 Cu ; 甲酸钠还原性较弱, 甲酸钠与 $\text{Cu}(\text{OH})_2$ 不反应, 因此过量甲醛与新制 $\text{Cu}(\text{OH})_2$ 反应主要产物是 Cu 和甲酸钠。由于同类物质的化学性质相似, 因此对同类物质发生的化学反应进行类推是非常必要的, 否定它就可能导致错误。然而也要注意同类物质化学性质存在差异, 忽略它也可能导致错误。虽然研究者在实验探究过程中出现这样那样的错误, 但为甲醛与新制 $\text{Cu}(\text{OH})_2$ 反应主要产物的检测将成为教学的

典型素材奠定了基础。

参考文献:

- [1] 夏立先. 对甲醛与新制氢氧化铜反应的实验研究 [J]. 中学化学教学参考, 2011, (6): 46~47.
- [2] 陈廷俊. 探究甲醛与新制氢氧化铜的反应 [J]. 中学化学教学参考, 2012, (12): 62~63.
- [3][5][6] 北京师范大学等. 无机化学(第4版, 下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 564, 704, 704.
- [4] 陆燕海. 银氨溶液检验 CO 气体 [J]. 化学教学, 2012, (1): 48~49.
- [7][8] 邢其毅等. 基础有机化学(第3版, 上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 550, 553.
- [9] 夏立先. 学生在化学学习中形成错误认识的原因分析及对策 [J]. 化学教育, 2013, (12): 46~47.

解为错解,所以万、钟二位老师将李薇老师得出错解的原因归咎于十字交叉法。笔者认为,李老师得出错解的原因不在于十字交叉法,而在于例题本身提供的数据不科学。

2 十字交叉法的“增解”和“漏解”

2.1 十字交叉法及其在数学上的“增解”和“漏解”

万、钟两位老师之所以将李薇老师对例题的错解归咎于十字交叉法,是因为两位老师认为李老师的错解是用十字交叉法解题导致的增解。在此,笔者特先探讨一下十字交叉法的“增解”和“漏解”问题。

十字交叉法是解一类计算题的结果速算法。此结果速算法所适用的题型是:根据题意可以列出如下二元一次方程组 I, 解题所求目标为 x 和 y 的比例 $\frac{x}{y}$, 实际解题时不列方程组, 不求出 x 和 y 的值, 直接用交叉的十字摆数据、算结果 $\frac{x}{y}$ 。十字交叉法的数学推导过程如下。

$$\text{列出二元一次方程组 I } \begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=c \end{cases}$$

将方程组 I 的两个方程等号两边相除得

$$\frac{x+y}{ax+by} = \frac{1}{c}$$

整理得 $\frac{x}{y} = \frac{b-c}{c-a} = \frac{c-b}{a-c}$, 将此代数式变形为十字交叉的形式得:

$$\begin{array}{ccc} x & a & b-c \\ & c & \\ y & b & c-a \end{array}$$

十字交叉法会不会导致增解或漏解呢?

从纯数学的角度说,二元一次方程组的解有三种情况:唯一解、无解、无穷多解。解二元一次方程组求 x 值、 y 值的解题过程本身不会导致 x 值、 y 值的“增解”和“漏解”。若不先求出 x 、 y 的值,而是直接求解 $\frac{x}{y}$, 就可能会导致所求的 $\frac{x}{y}$ 出现“增解”和“漏解”。

由于十字交叉法的适用对象是方程组 I, 所以笔者在此专门探讨一下用十字交叉法求解方程组 I 的 $\frac{x}{y}$ 时的增解和漏解问题。若直接求解方程组 I 的 x 值和 y 值, 当 $a \neq b$ 时, 方程组 I 有唯一解;

当 $a=b$ 且 $\frac{c}{a} \neq 1$ 时, 方程组 I 无解; 当 $a=b=c$ 时, 方程组 I 有无穷多解。若用十字交叉法(与用公式 $\frac{x}{y} = \frac{b-c}{c-a}$ 计算的结果等效)求解 $\frac{x}{y}$, 对应于上述三种情况, 直接用十字交叉法求解的 $\frac{x}{y}$ 有如下三种情况。当 $a \neq b$ 时, $\frac{x}{y}$ 有唯一正确的解 $\frac{b-c}{c-a}$; 当 $a=b$ 且 $\frac{c}{a} \neq 1$ 时, $\frac{x}{y}$ 有增解 $\frac{b-c}{c-a} = -\frac{1}{1}$; 当 $a=b=c$ 时, $\frac{x}{y} = \frac{0}{0}$, 此解漏掉了其他无穷多解。

由此可见, 用十字交叉法求解方程组 I 的 $\frac{x}{y}$ 时, 可能出现的增解只有 $\frac{x}{y} = -\frac{1}{1}$; 可能的漏解是在方程组有无穷解时, 所求的 $\frac{x}{y}$ 仅为 $\frac{0}{0}$ 。用十字交叉法求解方程组 I 的 $\frac{x}{y}$ 时, 之所以会出现“增解”和“漏解”, 是由于推导公式 $\frac{x}{y} = \frac{b-c}{c-a}$ 时将方程组 I 的两个方程式进行了除法运算。

2.2 十字交叉法在实际应用中的“增解”和“漏解”

就实际应用来说,任何能用二元一次方程组求解的实际问题,所列的二元一次方程组都有唯一解,因为实际问题都有其内在的、科学的、必然的联系。如果有人硬要用 10 只鸡鸭共有 22 只脚或者 10 只鸡鸭共有 20 只脚作为已知条件来求解鸡鸭的只数的话,那就只好列出无解或有无穷解的二元一次方程组了,此时用十字交叉法求解其 $\frac{x}{y}$ 就出现增解或漏解。显然,这类题目的增解或漏解并不是所求的实际问题本身或二元一次方程组出现了增解或漏解,而是题目本身的科学性出现了问题。

同其他实际问题一样,化学科学亦有其内在的、科学的、必然的联系。因此,只要化学实际问题的实验数据不出现大的偏差或错误时,任何一个符合方程组 I 的化学实际问题都一定有唯一解,用十字交叉法相应求出的 $\frac{x}{y}$ 也就一定是唯一正确的解,不会出现增解或漏解。换个角度来说,若用

十字交叉法求解化学问题出现了“增解”或“漏解”，则所求的增解 $\frac{x}{y}$ 一定为 $-\frac{1}{1}$ 、出现漏解的解 $\frac{x}{y}$ 一定为 $\frac{0}{0}$ ，这两个解在化学上都没有意义。如果在化学计算中求解出的 $\frac{x}{y}$ 为 $-\frac{1}{1}$ 或 $\frac{0}{0}$ ，则解题者一定知道自己在解题中出现了错误，这是解有关化学计算题的基本常识。

综上所述，十字交叉法是一种结果速算法，正确运用十字交叉法解答科学的化学实际问题时，应该不会出现“增解”和“漏解”。

3 例题错解的原因探析

3.1 氢碳比或碳氢比的二元一次方程组解法

李薇老师是用氢碳比的十字交叉法求解例题的，在此，笔者将李老师所用的十字交叉法还原为二元一次方程组来求解（注：笔者在此将混合烃和水均视为气态解答）。在已求得混合烃的平均分子式为 $C_{1.5}H_{4.8}$ 、混合烃为 CH_4 和 C_2H_6 的前提下，设 CH_4 中碳原子所占的物质的量分数为 x 、 C_2H_6 中碳原子所占的物质的量分数为 y ，根据氢原子与碳原子的倍数关系可得如下方程组 II。

$$\text{II} \begin{cases} x+y=1 \\ \frac{4}{1}x + \frac{6}{2}y = \frac{4.8}{1.5} \end{cases} \text{ 解方程组得: } \begin{cases} x=0.2 \\ y=0.8 \end{cases}$$

将碳原子的物质的量分数换算为甲烷与乙烷的比值得 $n(CH_4):n(C_2H_6)=1:2$ 。

还可以将李老师所用氢碳比的十字交叉法求解变化为用碳氢比的十字交叉法求解，并将碳氢比的十字交叉法还原为二元一次方程组求解。设 CH_4 中氢原子所占的物质的量分数为 x 、 C_2H_6 中氢原子所占的物质的量分数为 y ，根据碳原子与氢原子的倍数关系可得如下方程组 III。

$$\text{III} \begin{cases} x+y=1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{6}y = \frac{1.5}{4.8} \end{cases} \text{ 解方程组得: } \begin{cases} x=0.25 \\ y=0.75 \end{cases}$$

将氢原子的物质的量分数换算为甲烷与乙烷的比值得 $n(CH_4):n(C_2H_6)=1:2$ 。用方程组 II、III 求解的结果相同，这是由于氢碳比与碳氢比互为倒数关系。

3.2 体积比（物质的量比）的十字交叉法解法

万、钟两位老师是根据混合烃的体积和 CO_2 的体积、混合烃的体积和 H_2O 的体积列两组二元

一次方程组进行求解的。在此，笔者将这两组二元一次方程组转化为符合十字交叉法原理的二元一次方程组用十字交叉法进行求解。设混合烃中 CH_4 的体积分数（即物质的量分数）为 x 、 C_2H_6 的体积分数为 y ，根据混合烃的体积、 CO_2 的体积、 H_2O 的体积，可列如下两组二元一次方程组 IV、V。

$$\text{IV} \begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=\frac{30}{20} \end{cases} \text{ 用十字交叉法直接求得 } \frac{x}{y} = \frac{1}{1}。$$

$$\text{V} \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+3y=\frac{48}{20} \end{cases} \text{ 用十字交叉法直接求得 } \frac{x}{y} = \frac{3}{2}。$$

由于方程组 IV、V 的解互不相同，所以例题无解。

3.3 对比分析找原因

联系比较李、万、钟三位老师的解法及上述解法可见，李老师的解题结果和万、钟两位老师的解题结果均可由十字交叉法和二元一次方程组两种方法解得。因此，李老师解例题得出的错误结果确实不是用十字交叉法解题导致的增解。李老师错解例题的原因究竟是什么呢？

笔者在进行认真分析之后发现，李老师错解例题及方程组 II 和方程组 III 的原因在于解题过程中使用了氢碳比（或碳氢比）。如果按所求的结果 $n(CH_4):n(C_2H_6)=1:2$ 进行逆运算，我们可以求出符合此比例的 CH_4 和 C_2H_6 混合物的平均分子式为 $C_{5/3}H_{16/3}$ 。对比文献 [1] 和 [3] 及上述各解法中所求例题中的平均分子式 $C_{1.5}H_{4.8}$ 来看，二者的氢碳比比值相等 $\frac{4.8}{1.5} = \frac{16/3}{5/3} = 3.2$ ，但二者实际的氢碳原子数并不相同。我们知道， CH_3 和 C_2H_6 的氢碳比相同、氢碳原子数不同， C_2H_6 表示乙烷， CH_3 不表示一种实际存在的物质。同样， $C_{1.5}H_{4.8}$ 和 $C_{5/3}H_{16/3}$ 的氢碳比相同、氢碳原子数不同， $C_{5/3}H_{16/3}$ 表示一种实际存在的甲烷和乙烷混合物的平均组成， $C_{1.5}H_{4.8}$ 不表示一种实际存在的甲烷和乙烷混合物的平均组成。对于甲烷和乙烷的混合物来说，当碳原子的平均组成为 1.5 时，我们可推算出氢原子的平均组成必为 5，即存在平均组成为 $C_{1.5}H_5$ 的甲烷和乙烷混合物。当氢原子的平均组成为 4.8 时，我们可推算出碳原子的平均组成必为 1.4，即存在平均组成为 $C_{1.4}H_{4.8}$ 的甲烷和乙烷混合物。

由此可见, $C_{1.5}H_{4.8}$ 是一个鸡鸭的总个数与总脚数不相匹配的组成, $C_{1.5}H_{4.8}$ 不能代表任何以比例组成的甲烷和乙烷混合物。从主观上说, 李薇老师错解例题的原因在于使用了氢碳比; 从客观上说, 由于 $C_{1.5}H_{4.8}$ 中的数据源于题给的数据, 所以李薇老师错解例题的客观原因在于题目本身的数据不科学。

上述探讨还给我们这样一个重要的启示: 在涉及分子式或化学式中原子个数的计算时, 我们要慎用原子个数的比值。

4 例题存在的问题及相关的教学反思

4.1 例题存在的两个问题

由上述探讨可见, 例题存在的第一个问题是数据不科学。实际上在“相邻两种烷烃”的前提下, 例题只需要提供混合烃的总体积和二氧化碳的体积就可以求解, 例题如果只提供混合烃的总体积和水的体积也可以求解(可参看文献[1, 3]及笔者的上述解法)。当然, 例题亦可以同时提供混合烃的总体积、二氧化碳和水的体积, 只是在同时提供三者的体积时必须考虑各体积间的科学匹配性。当例题同时提供科学匹配的各物质的体积时, 李老师与万、钟两位老师及笔者的上述解法就会得出一致的结论, 且各解法的结果之间可以相互验证。对于平均组成为 $C_{5/3}H_{16/3}$ 的甲烷和乙烷混合物来说, 用各解法所求的结果均是 $n(CH_4):n(C_2H_6)=1:2$ 。

例题存在的第二个问题是完全忽视了反应条件与物质状态间的关系。题目在没有任何反应条件的前提下, 给出了混合烃、二氧化碳和水的体积, 几位老师解题时都毫不犹豫地把混合烃和水当成了气态进行解答。大家都知道物质状态与外界条件是密切相关的, 可这几位老师在编题和解题时都完全忽视了外界条件, 这充分反映出了在教学中只追求结果、不顾及科学逻辑的缺点。这个缺点应该引起广大中学化学教师的高度重视。

4.2 关于例题的教学反思

在存在上述两个问题的情况下, 如果不加思考地把此例题作为训练题交给学生解答的话, 将会出现些什么情况呢? 笔者预计会有三种情况。一种情况是部分优秀的学生可能会感到难以下手, 因为他们在解题时首先会考虑到混合烃和水的状态, 不明确混合烃和水的状态, 就难以解答此题。当这些学生对此提出疑问时, 会不会有教师武断地肯

定混合烃和水为气态呢? 笔者不敢肯定说“没有”。第二种情况是部分学生把混合烃和水都当成气态进行解答, 在解题思路和运算过程均正确的情况下, 学生可能会得出三种互不相同的结果。当三种结果呈现在教师面前时, 会不会有教师武断地否定其中的两个结果或者束手无策呢? 笔者亦不敢肯定说“没有”。第三种情况是有学生经过讨论解答后得出“题目错误”或“此题无解”的结论, 会不会有教师因毫无准备而敷衍了事呢? 笔者亦不敢肯定说“没有”。

想想这些可能的情况, 我们自然就会明白这样一个道理: 一道化学错题对于我们化学教学既可能是很好的机会和挑战, 也可能产生很大的破坏作用。为了避免此种破坏作用, 我们应该认真地、科学地编写每一道原创题。我们还应该深入地研究包括错题在内的例题和习题, 灵活科学地应对教学中出现的科学问题, 改善我们的教学。

我们可不可以把这样一道错题变成好题呢? 完全可以, 笔者研究后把例题改编成了如下选择题。

在 110°C 、1 大气压下, 相邻两种气态烷烃的混合物 20mL, 完全燃烧后恢复到原温度和压强, 测得 CO_2 的体积为 30mL、 H_2O 的体积为 48mL。该混合烃的可能组成为()。

- A. $n(\text{C}_2\text{H}_6):n(\text{C}_3\text{H}_8)=1:2$
- B. $n(\text{CH}_4):n(\text{C}_2\text{H}_6)=1:1$
- C. $n(\text{CH}_4):n(\text{C}_2\text{H}_6)=3:2$
- D. $n(\text{CH}_4):n(\text{C}_2\text{H}_6)=1:2$
- E. 无解

改变后的选择题既可以起到巩固学生基础知识、提升学生基本技能的作用, 又可以起到发散学生思维、启发学生探究的作用。相比之下, 此题由错题变化而来, 其教学价值远高于普通的训练题。

参考文献:

- [1][2] 李薇. 十字交叉法应用中的常见问题及解析[J]. 化学教学, 2012, (5): 65.
- [3][4] 万辉霞, 钟辉生. 对一道错题的剖析——兼谈十字交叉法的应用[J]. 化学教学, 2013, (3): 78~79.